

Θα βρούμε τώρα τις συντεταγμένες οι συντεταγμένες του σημείου P ως προς το δίο ευχένο.

Υποθέτουμε ότι ως προς το πρώτο σύστημα οι συντεταγμένες είναι  $(x, y, z)$  και ως προς το δεύτερο είναι  $(X, Y, Z)$ , οπότε:

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0 &= X(a_1 \vec{x}_0 + b_1 \vec{y}_0 + \gamma_1 \vec{z}_0) + Y(b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + \gamma_2 \vec{z}_0) \\ &+ Z(\gamma_1 \vec{x}_0 + \gamma_2 \vec{y}_0 + \gamma_3 \vec{z}_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 X + b_1 Y + \gamma_1 Z = x \\ a_2 X + b_2 Y + \gamma_2 Z = y \\ a_3 X + b_3 Y + \gamma_3 Z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

Αν ξέρουμε τις γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  με τα  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ , τότε μπορούμε να βρούμε εύκολα τις συντεταγμένες.

Παρατηρούμε: καταρχάς έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = a_1 \cdot \vec{x}_0 + a_2 \cdot \vec{y}_0 + a_3 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{y}_0 = b_1 \cdot \vec{x}_0 + b_2 \cdot \vec{y}_0 + b_3 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{z}_0 = \gamma_1 \cdot \vec{x}_0 + \gamma_2 \cdot \vec{y}_0 + \gamma_3 \cdot \vec{z}_0 \end{cases} \quad (*)$$

$$a_1 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle = \text{συνημιζωνο της γωνίας του } \vec{x}_0, \vec{x}_0.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$a_1 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle = \cancel{\|\vec{x}_0\|} \cdot \cancel{\|\vec{x}_0\|} \cdot \cos \phi_1$$

$$a_2 = \langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle = \cancel{\|\vec{x}_0\|} \cdot \cancel{\|\vec{y}_0\|} \cdot \cos \phi_2$$

$$a_3 = \langle \vec{x}_0, \vec{z}_0 \rangle = \cancel{\|\vec{x}_0\|} \cdot \cancel{\|\vec{z}_0\|} \cdot \cos \phi_3$$

Ομοίως για τους συντελεστές  $b_1, b_2, b_3$  και  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

! Παρατήρηση:

Επειδή τα διανύσματα είναι ορθογώνια, προκύπτει:

$$\text{ότι ο πίνακας } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ είναι } \underline{\underline{\text{ορθογώνιος}}}$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{A \cdot A^T = I.}$$

Με αντικατάσταση, παίρνουμε:

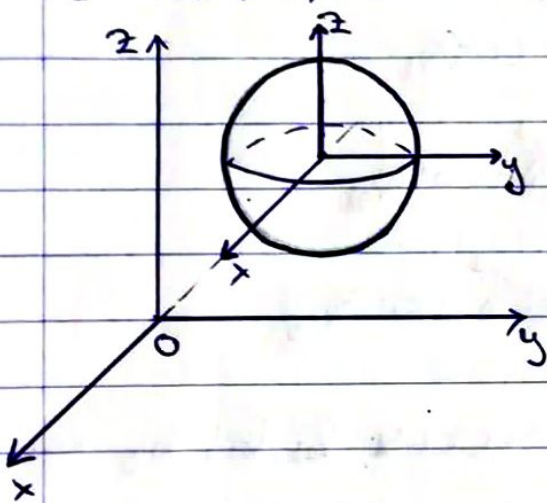
$$\begin{aligned} x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0 &= a \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0 + \gamma \cdot \vec{z}_0 + X \cdot \vec{x}_0 + Y \cdot \vec{y}_0 + Z \cdot \vec{z}_0 \\ &\stackrel{(\text{υπόθεση})}{=} a \vec{x}_0 + b \vec{y}_0 + \gamma \vec{z}_0 + X \cdot \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 + Z \vec{z}_0 \\ &= (a+X) \vec{x}_0 + (b+Y) \vec{y}_0 + (\gamma+Z) \vec{z}_0. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \\ z = \gamma + Z \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \\ Z = z - \gamma \end{cases}$$

### Παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε τη σφαίρα  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$ ,  
ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  
 $\{O(0,0,0), \vec{x}_0 = (1,0,0), \vec{y}_0 = (0,1,0), \vec{z}_0 = (0,0,1)\}$ .



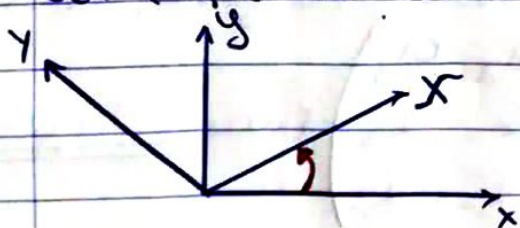
Ός προς το σύστημα:

$$\{O'(1,2,1), \vec{x}_0 = (1,0,0), \vec{y}_0 = (0,1,0), \vec{z}_0 = (0,0,1)\},$$

η εξίσωσή της θα είναι:  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

### (2) Στροφή:

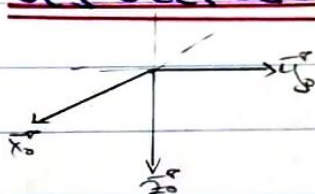
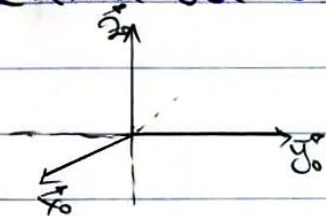
Όταν 2 συστήματα έχουν κοινή αρχή,  
θα λέμε ότι το ένα είναι στροφή του άλλου.



Ας δούμε πως συνδέονται οι συντεταγμένες δύο τέτοιων συστημάτων.

## § Μετασχηματισμοί συντεταγμένων.

Ένα δίδεκτη συντεταγμένων  $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ , θα λέγεται ορθόγωνο όταν τα διανύσματα  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Είναι εύκολο ένα τέτοιο δίδεκτη να λέγεται δεξιόστροφο όταν:  $\langle \vec{x}_0 \times \vec{y}_0, \vec{z}_0 \rangle > 0$ .

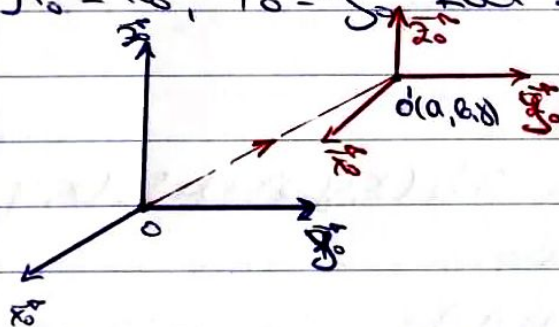


"Δεξιόστροφο δίδεκτη"      "Αριστερόστροφο".

Από εδώ και στο εξής θα μελετούσαμε μόνο δεξιόστροφα ορθόγωνα συστήματα.

### (1) Παράλληλη μεταφορά.

Θεωρούμε δύο συστήματα συντεταγμένων:  $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$  και  $\{O', \vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0\}$ , με:  $\vec{x}'_0 = \vec{x}_0, \vec{y}'_0 = \vec{y}_0$  και  $\vec{z}'_0 = \vec{z}_0$ .



Έχουμε λοιπόν διαφορετική αρχή, αλλά παράλληλους άξονες.

Δύο τέτοια συστήματα θα λέγονται παράλληλα.

Ερώτηση: Πώς αντίζονται οι συντεταγμένες του πρώτου συστήματος με του δεύτερου;

Έστω σημείο P με συντεταγμένες  $(x, y, z)$  ως προς το πρώτο σύστημα και με  $(x', y', z')$  ως προς το δεύτερο. Εάν  $(a, b, c)$  οι συντεταγμένες του  $O'$  ως προς το πρώτο σύστημα, τότε:  $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ .

Αναλ. Γεωμ. 8/04/2019.

2

Δίνεται η ζωή είναι ο κύκλος:

$$(K) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\delta)^2 = R^2 \\ (x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) + (z_0-\delta)(z-\delta) = R^2, \end{cases}$$



ο κύκλος (K), πέρχεται από τον κύκλο.

Πρόβλημα 2:

Θεωρούμε 2 σφαίρες:

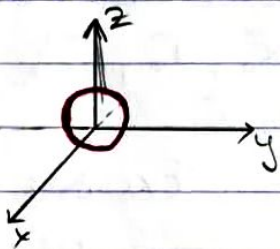
$$(\Sigma_1): S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

$$(\Sigma_2): S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

As υποθέσουμε ότι οι σφαίρες  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  τέμνονται και δεν εφάπτονται.



► Ερώτηση: Ποιές είναι οι σφαίρες που περιέχουν τον κύκλο  $K = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ ?



► Απάντηση: Η εξίσωση  $\lambda S_1(x, y, z) + \mu S_2(x, y, z) = 0$ , που ισοδυναμεία γράφεται:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2) + (\lambda A_1 + \mu A_2)x \\ + (\lambda B_1 + \mu B_2)y \\ + (\lambda C_1 + \mu C_2)z \\ + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0. \end{aligned}$$

παριστάνει σφαίρα που περιέχει τον κύκλο  $K = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ .

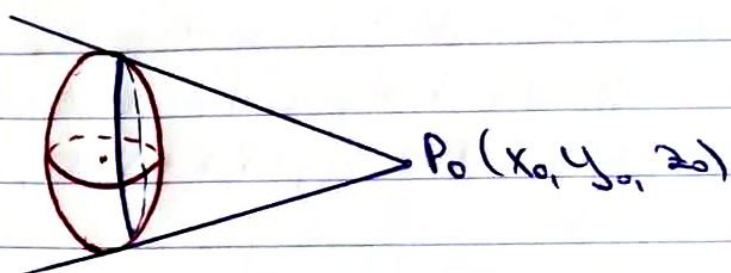
$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$



### Πρόβλημα ①:

Δίνεται η σφαίρα: (Σ):  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\delta)^2 = R^2$ , και  
ένα σημείο  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  εκτός αυτής



Από το σημείο  $P_0$ , μπορούμε να φέρουμε  
πολλά επίπεδα που εφάπτονται στη σφαίρα.  
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος όλων των  
επίπεδων εφάπτης.

Ισχυρισμός: Τα επίπεδα εφάπτης, σχηματίζουν  
κύκλο.

### Απόδειξη ισχυρισμού:

Ας υποθέσουμε ότι  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  είναι το  
σημείο εφάπτης ενός εφαιρούμενου επιπέδου  $\Pi$   
από το  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . Η εξίσωση αυτού του  
επιπέδου θα είναι:

$$(\Pi): (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) + (z-\delta)(z_1-\delta) = R^2,$$

όπως το  $P_0$  διέρχεται από το (Π) άρα  
εφαρμόζουμε την εξίσωση του (Π).

$$\Rightarrow (x_0-a)(x_1-a) + (y_0-b)(y_1-b) + (z_0-\delta)(z_1-\delta) = R^2 \quad (*)$$

Για το τυχόν σημείο εφάπτης  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  
Πληρούμε την εξίσωση (\*).

Για η (\*) γράφεται:

$$(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) + (z_0-\delta)(z-\delta) = R^2 \quad (**)$$

Για τα επίπεδα τυχόν είναι: η τομή  
της σφαίρας (Σ) με το επίπεδο (Π).

Αναλ. Γεωμ. 8/04/2019

①

### § Σφαίρα

Η εξίσωση:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ , όπου  $a, b, \gamma, R \in \mathbb{R}$  με  $R > 0$ , παριστάνει σφαίρα με κέντρο το σημείο  $K(a, b, \gamma)$  και ακτίνα  $R$ .

Παρατήρηση, μια σφαίρα μπορεί να γραφτεί στην μορφή:  $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ , όπου  $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ .

Η "τομή" σφαίρας και επιπέδου παριστάνει σημείο ή κύκλο.



### Θεώρημα ①:

Έστω σφαίρα με εξίσωση:

$$(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2.$$

Τότε το φανταστικό επίπεδο της  $(\Sigma)$  στο σημείο

$(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$  έχει εξίσωση:

$$(x-a) \cdot (x_0-a) + (y-b) \cdot (y_0-b) + (z-\gamma) \cdot (z_0-\gamma) = R^2.$$



### ! Παρατήρηση:

Συντά των εξίσωση:  $\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$ , την ονομάζουμε "γεωμετρική σφαίρα".

